Proceedings of IAM, V.6, N.1, 2017, pp.36-45

МЕТОД ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ТРЕХТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ПРИ НЕРАЗДЕЛЕННОСТИ ВО ВНУТРЕННИХ И КОНЕЧНЫХ ТОЧКАХ*

М.М. Муталлимов[1], Н.И. Велиева[1], Ш.А. Фараджева[1]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: nailavi@rambler.ru

Резюме. Рассматривается оптимизационная задача с трехточечными краевыми условиями, где неразделенность имеется во внутренних и конечных точках. Из нестандартности краевых условий для определения значения недостающих краевых данных используются начальные данные множителя Лагранжа. Для решения исходной задачи предлагается метод прогонки, т.е. используется решение матричных дифференциальных уравнений Риккати, а также линейных матричных дифференциальных уравнений, которые отличается от известных методов тем что, при решение не позволяет повысить размерность исходной системы. Результаты иллюстрируются конкретными примерами газлифтного процесса где движение описывается системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными матрицными коэффициентами.

Ключевые слова*:* оптимизация, метод прогонки, трехточечные краевые условия, дифференциальные уравнение Риккати, линейные системы алгебраические уравнение.

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение

Как известно, что для выбора программных траекторий при добычи нефти [6], а также при движения роботов [10] один из основных способов является использование решения задачи оптимизации с трехточечными краевыми условиями [8]. Обычно во многих случаях краевые условия задаются или полностью неразделенные или же все точки входят в разделенные краевые условия. Такие задачи возникают при добычи нефти с газлифтным способом [6], т.е. при выборе подаваемые объема газа, так чтобы объем газожидкостной смеси в начале подъемника максимально перебрался к концу подъемника [1,3]. Особый интерес представляет случай, когда начальные условия полностью заданы, а в внутренних и конечных точках краевые условия неразделенные. Отметим, что такая задача решена в [9], где при процессе решений повышается размерность исходной задачи в два раза. Более интересной является решением данной задачи с методом прогонки [5], где подход не позволяет повышение размерности исходной задачи. Однако,

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 18.04.2017

из за разрывности множителя Лагранжа во внутренних точках, применение стандартных методов прогонки [4] является чрезмерно трудно. Поэтому в отличие от [4], в данной работе разрабатывается специальный метод прогонки, для определения недостающих краевых данных, который используется из множителя Лагранжа в начальной точке. Показывается, что такие задачи возникают при добычи нефти с газлифтным способом [2]. Результаты применяются в простых задачах для добычи нефти [7].

2. Постановка задачи

Уравнение движение объекта на интервалах $[0,\tau)$, $(\tau,T]$, описывается управляемой нестационарной системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Fx + Gu + v \ , \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x^0 \ , \tag{2}$$

и в точках τ, T соответственно с неразделенным условием относительно координатой $x(\tau),\ x(T)$

$$Ax\ (\tau) = Bx(T)\,. \tag{3}$$

Построим квадратичный функционал в виде

$$J = \frac{1}{2}x'(T)S_f\,x(T) + \frac{1}{2}\int_0^T [x'(t)Rx(t) + u'(t)Cu(t)]dt\,, \tag{4}$$

где $S_f = S_f^{'} < 0,\ R = R' > 0,\ C = C' > 0$, данные матрицы соответствующий размерности, штрих означает операцию транспонирование.

Требуется найти такое решение задачи (1) - (3), который дает минимум функционалу (4).

Для решения задачи (1) - (3) формируется вспомогательный критерия качества т.е. в функционал (4) прибавляется (1) с некоторым множителем $\lambda(t)$ в следующим виде

$$\begin{aligned}\overline{J} = \frac{1}{2}x'(T)S_f\,x(T) + \gamma'[Ax(\tau) - Bx(T)] + \frac{1}{2}\int_0^T [x'(t)Rx(t) + u'Cu(t)]dt + \\ + \int_0^T \lambda'(t)[Fx(t) + Gu(t) + v - x']dt\end{aligned} \tag{5}$$

Как и в работе [4] получаем уравнения Эйлера - Лагранжа в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) - M\lambda(t) + v(t) \\ \dot{\lambda}(t) = -Rx(t) - F'\lambda(t), \\ u(t) = -C^{-1}(t)G'(t)\lambda(t). \end{cases} \qquad (6)$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} x(0) = x^0 \\ Ax(\tau) = Bx(T) \\ \lambda(\tau+0) = \lambda(\tau-0) - A'\gamma \\ \lambda(T) = S_f^k x(T) - B'\gamma \end{cases}, \qquad (7)$$

где $M = GC^{-1}G'$.

Сначала рассмотрим задачу (6), (7) на интервале $(\tau, T]$. Разыскиваем $\lambda(t)$ в виде

$$\lambda(t) = S(t)x(t) + N(t)\gamma + \omega(t) \ , \qquad (8)$$

где неизвестные матрицы $S(t) \ = S^{'}(t) > 0,\ N(t),\ \ \omega(t)$ имеют соответствующую размерность. Учитывая (8) в (6) и проводя некоторое преобразование, то для неизвестных $S(t)$, $N(t),\ \omega(t)$ получим ниже следующие матричные уравнения

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -F'S(t) - S(t)F + S(t)MS(t) - R(t) \\ \dot{N}(t) = [S(t)M - F']N(t) \\ \dot{\omega}(t) = [S(t)M - F']\omega(t) - S(t)v. \end{cases} \qquad (9)$$

В точке $t = T$ соотношение (8) переходит к виду

$$\lambda(T) = S(T)x(T) + N(T)\gamma + \omega(T) \ . \qquad (10)$$

Сравнивая (10) с формулами (7) получим для $S(T), N(T), \varpi(T)$ следующие условия

$$\begin{cases} S(T) = S_f \\ N(T) = -B' \\ \omega(T) = 0 \end{cases}. \qquad (11)$$

Учитывая значение (8) в точках $\tau+0$ и $\tau-0$ из (7) имеем

$$\begin{aligned} &S(\tau+0)x(\tau+0) + N(\tau+0)\gamma + \omega(\tau+0) = \\ &= S(\tau-0)x(\tau-0) + [N(\tau+0) - A']\gamma + \omega(\tau-0) \end{aligned}. \qquad (12)$$

Таким образом для $S(t),\, N(t),\, \omega(t)$ в точках $\tau+0$ и $\tau-0$ получается следующие условия

$$\begin{cases} S(\tau+0)=S(\tau-0) \\ N(\tau+0)=N(\tau-0)-A' \\ \omega(\tau+0)=\omega(\tau-0) \end{cases} \tag{13}$$

Далее в точке $t=0$ для функции $\lambda(t)$ из (8) имеем

$$\lambda(0)=S(0)x(0)+N(0)\gamma+\omega(0)\,.$$

Обозначая $\lambda(0)=\mu$ из последней выражений получим

$$N(0)\gamma-\mu=-S(0)x(0)-\omega(0)\,. \tag{14}$$

Как и [6] предположим

$$-Bx(T)=N'(t)x(t)+n(t)\gamma+W(t)\quad , \tag{15}$$

Тогда для $n(t),W(t)$ имеем

$$\begin{cases} \dot n(t)=N'(t)M(t)N(t), \quad n(T)=0 \\ \dot W(t)=N'(t)[M\omega(t)-v(t)],\; W(T)=0 \end{cases} \tag{16}$$

Учитывая (15) на втором уравнения (7) имеем

$$-Ax(\tau)=N'(\tau+0)x(\tau)+n(\tau+0)\gamma+W(\tau+0)\,,$$

где последний переходит к виду

$$[N'(\tau+0)+A]x(\tau)+n(\tau+0)\gamma=-W(\tau+0)\,. \tag{17}$$

$$-Ax(\tau)=N'(\tau-0)x(\tau)+n(\tau-0)\gamma+W(\tau-0)$$

отсюда получаем $n(\tau+0)=0, W(\tau-0)$.

Решая уравнение (16) с этими условиями находим $n(t),W(t)$ на интервале $(0\;\;\tau)$.

С другой стороны для $t=0$ получим

$$-Ax(\tau)=N'(0)x(0)+n(0)\gamma+W(0)$$

или

$$Ax(\tau)+n(0)\gamma=-N'(0)x(0)-W(0)\qquad . \tag{18}$$

Таким образом объединяя (14), (17), (18) для определение $\lambda(0),x(\tau),\gamma$ имеем следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} -E & 0 & N(0) \\ 0 & N'(\tau+0)+A & n(\tau+0) \\ 0 & A & n(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda(0) \\ x(\tau) \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S(0)x(0)-\omega(0) \\ -W(\tau+0) \\ -N'(0)x(0)-W(0) \end{bmatrix} \tag{19}$$

После нахождение $x(\tau),\nu$ из (19) для определения $x(t),u(t)$ из (7) получим следующие соотношения

$$\dot{x}(t) = \left(F(t) - M(t)S(t)\right)x(t) - M(t)N(t)\gamma + \left(\nu(t) - M(t)\omega(t)\right). \qquad (20)$$

$$u(t) = -C^{-1}(t)G'(t)S(t)x(t) - C^{-1}(t)G'(t)N(t)\gamma - C^{-1}(t)G'(t)\omega(t) \qquad (21)$$

Теперь сформулируем алгоритм для решения задачи (1)-(4).

Алгоритм

1. Формируется матрицы $F,\ G, R,\ C, S_f,\ A, B$ и векторы $\nu(t), x^0$.
2. Решается задача Коши (9), (11) и находиться $S(t), N(t), \omega(t)$ на интервале $(\tau + 0, T]$.
3. Из (13) определяется $S(\tau - 0), N(\tau - 0), \omega(\tau - 0)$. Используя эти значения из уравнения (9) находиться $S(t), N(t), \omega(t)$ на интервале $(0, \tau - 0]$.
4. Решая (16) находим $n(t), W(t)$ на интервалах $(0, \tau), \tau + 0, T)$ где последний находиться при условии $n(\tau - 0) = 0, W(\tau - 0)$.
5. Решаем систему (19) находим $\lambda(0), x(\tau), \gamma$.
6. Решая уравнение (20) с начальными условиями $x(0)$, находим $x(t)$.
7. Определяем искомое управление $u(t)$ по формуле (21).

Пример

Для простаты рассмотрим уравнения (1) из [9] т.е. концы движение ГЖС на газлифтном процессе аппроксимируется методом прямых.

Пусть [9]

$$F = \begin{cases} F_1 & x \in (0, L) \\ F_2 & x \in (l, 2L \end{cases} \quad C = \begin{cases} c_1 & x \in (0, L) \\ c_2 & x \in (l, 2L) \end{cases} \quad a = \begin{cases} a_1 & x \in (0, L) \\ a_2 & x \in (l, 2L) \end{cases}$$

$$l = \frac{L}{N}$$

При использования метода прямых, возьмем $N = 1$.

Тогда получим следующую систему дифференциальных уравнений.

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{c_1^2}{F_1 l} Q_1 + \frac{c_1^2}{F_1 l} Q_0$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{F_1}{l} P_1 - 2a_1 Q_1 + \frac{F_1}{l} P_0$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -\frac{c_2^2}{F_2 l} Q_2 + \frac{c_2^2}{F_2 l} Q_1 + \frac{c_2^2}{F_2 l} Q_{pl}$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = -\frac{F_2}{l} P_2 + \frac{F_2}{l} P_1 - 2a_2 Q_2 + \frac{F_2}{l} P_{pl}$$

с начальным условиями $P_1(Q) = P_1^0,\ Q_1^0(0) = Q_1^0,\ P_2(Q) = P_2^0,\ Q_2^0(0) = Q_2^0$.

После некоторых преобразований получим следующую матричную уравнению

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{Q}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \dot{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c_1^2}{F_1 l} & 0 & 0 \\ -\frac{F_1}{l} & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2^2}{F_2 l} & 0 & -\frac{c_2^2}{F_2 l} \\ \frac{F_2}{l} & 0 & -\frac{F_2}{l} & -2a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{c_1^2}{F_1 l} \\ \frac{F_1}{l} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2^2}{F_2 l} \\ \frac{F_2}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{pl} \\ Q_{pl} \end{bmatrix}.$$

Если обозначить

$$u = \begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2^2}{F_2 l} \\ \frac{F_1}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{pl} \\ Q_{pl} \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_1^2}{F_1 l} \\ \frac{F_1}{l} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix},$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} P_1^2 \\ Q_1^2 \\ P_2^2 \\ Q_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5177500 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c_1^2}{F_1 l} & 0 & 0 \\ -\frac{F_1}{l} & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2^2}{F_2 l} & 0 & -\frac{c_2^2}{F_2 l} \\ \frac{F_2}{l} & 0 & -\frac{F_2}{l} & -2a_2 \end{bmatrix},$$

тогда получим уравнение

$$\dot{x} = Fx + Gu + v, \quad x(0) = x^0,$$

в компактном виде. Здесь

$$Q_1(\tau) = Q_2(T), \quad \tau < T.$$

Если обозначить $A = [0\ 1\ 0\ 0]$, $B = [0\ 0\ 0\ 1]$ то

$$Ax(\tau) = Bx(T).$$

В качества функционала рассмотрим

$$J = \frac{1}{2}x'(T)S_f \times (T) + \frac{1}{2}\int_0^T [x'(t)Rx(t) + u'(t)Cu'(t)]dt \ .$$

Допустим

$$C = E, \ R = 0 \ , \quad S_f = 0.$$

Тогда первое уравнение (9) примет следующий вид

$$\dot{S} = -F'S - SF + SMS \qquad . \qquad (22)$$

Найдем решение (22)на интервале (τ, T) с условием $S(T) = 0$. Очевидно что, $S(t) = 0$ на всем интервале. Отсюда получим $S(\tau + 0) = 0$.

Сейчас решим уравнения $\dot{N} = -F'N$ с условием $N(T) = -B'$. Решение этой задачи имеет вид

$$N(t) = -e^{-F'(t-T)}B' \ .$$

Отсюда следует $N(\tau + 0) = -e^{-F'(\tau - T)}B'$. Аналогично решается задача

$\dot{\omega} = -F'\omega$, $\omega(T) = 0$. Тогда получим $\omega(\tau + 0) = 0$. Далее используя соотношение (13) имеем

$$S(\tau - 0) = S(\tau + 0) = 0,$$

$$N(\tau - 0) = N(\tau + 0) + A' = -e^{-F'(\tau - T)}B' + A',$$

$$\omega(\tau - 0) = \omega(\tau + 0) = 0.$$

Сейчас найдем функции $S(t), N(t), \omega(t)$ на интервале $(0, \tau)$.

Аналогично на интервале (τ, T) получим

$$S(t) = 0 \Rightarrow S(0) = 0,$$

$$N(t) = e^{-F'(t-\tau)}K \Rightarrow N(0) = e^{P'\tau}K,$$

$$\omega(t) = 0 \Rightarrow \omega(0) = 0 \ ,$$

Где $K = -e^{-F'(\tau - T)}B' + A'$. Перейдем к определению $n(t), W(t)$ из ниже следующих задач.

$$\begin{cases} \dot{n} = N'(t)MN(t) \ , \ n(T) = 0 \\ \dot{W} = -N(t)v \ , \ \ W(T) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{n} = N'(t)MN(t) \ , \quad n(\tau - 0) = 0 \\ \dot{W} = -N(t)v \quad , \qquad W(\tau - 0) = 0 \end{cases}$$

Для нахождения $n(t)$ и $W(t)$ на интервале (τ, T) и $(0,\tau)$ воспользуемся интегральными равенствами

$$\int_t^T n(t)\,dt = \int_t^T N'(t) MN(t)\,dt\,,$$

$$\int_t^T \dot{W}\,dt = -\int_t^T N(t)\nu dt\,,$$

отсюда

$$n(T) - n(t) = \int_t^T N'(t) MN(t)\,dt$$

$$n(t) = -\int_t^T N'(t) MN(t)\,dt = -\int_t^T e^{-F(t-T)} M e^{-F'(t-T)} dt \quad , \qquad t \in (\tau, T)\,, \tag{23}$$

$$W(T) - W(t) = -\int_t^T N(t)\nu dt\,,$$

$$W(t) = \int_t^T N(t)\nu dt = \int_t^T e^{-F'(t-T)} \nu dt \qquad t \in (\tau, T)\,. \tag{24}$$

Аналогично

$$\int_t^\tau \dot{n}\,dt = \int_t^\tau N'(t) MN(t)\,dt\,,$$

$$\int_t^\tau \dot{W}\,dt = -\int_t^\tau N(t)\nu dt$$

или же

$$n(\tau) - n(t) = \int_t^\tau N'(t) MN(t)\,dt$$

$$n(t) = -\int_t^\tau N'(t) MN(t)\,dt = -\int_t^\tau e^{-F(t-\tau)} M e^{-F'(t-\tau)} dt, \qquad t \in (0, \tau)\,, \tag{25}$$

$$W(\tau) - W(t) = -\int_t^\tau N(t)\nu dt\,,$$

$$W(t) = \int_t^\tau N(t)\nu dt = \int_t^\tau e^{-F'(t-\tau)} \nu dt \tag{26}$$

Далее, используя (23)-(26)мы можем определить главную матрицу системы (19), затем решая эту систему находим $\lambda(0), x(\tau), \gamma$.

3. Заключение

Таким образом, в этой работе исследована задача оптимального управления с трехточечными граничными условиями, в которой имеется неразделенность во внутренних и конечных точках интервала с применением к одной задаче по добыче нефти газлифтным способом. В отличие от работы [9] здесь применяется метод прогонки, который при решение не повышает размерность поставленной задачи.

Литература

1. Aliev F.A, Ismailov N.A, Mukhtarova N.S., Algorithm to determine the optimal solution of a boundary control problem, Automation and Remote Control, V.76, No.4, 2015, pp.627-633.
2. Алиев Ф.А, Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б., Проблемы математического моделирования, оптимизации и управления газлифта Доклады НАН Азербайджана, Т.4, 2009, с.43-57.
3. Алиев Ф.А, Исмаилов Н.А., Задачи оптимизации с периодическим краевым условием и граничным управлением в газлифтных скважинах, Нелинейные колебания, Т.17, N.2, с.151-160.
4. Алиев Ф.А., Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем, Баку, Elm, 1989, 320 с.
5. Алиев Ф.А., Зульфугарова Р.Т., Муталлимов М.М., Алгоритм прогонки для решения задач оптимального управления с трёхточечными краевыми условиями. Проблемы Управления и Информатики, № 4, 2008, с.48-57.
6. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А., Моделирование работы газлифтной скважины Доклады НАН Азербайджана, 2008, 4, с.30-41.
7. Алиев Ф.А., Муталлимов М.М, Алгоритм для решения задачи построения программных траектории и управления при добыче нефти газлифтным способом, Доклады НАН Азербайджана, том LXV, №5, 2009, с.9-18.
8. Алиев Ф.А., Муталлимов М.М., Алгоритмы решения задачи оптимального управления с трехточечными неразделенными краевыми условиями, Проблемы Управления и Информатики, № 4, 2005, с.36-45.
9. Велиева Н.И., Муталлимов М.М., Фараджева Ш.А., Алгоритм решения задачи оптимального управления с трехточечными граничными условиями с применением к добыче нефти газлифтным способом, Proceedings of IAM, Vol.5, No.2, 2016, pp.143-155.

10. Ларин В.Б., Управление шагающими аппаратами, Киев: Наук.думка, 1980, 168 с.

Daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üç nöqtəli sərhəd şərtli optimizasiya məsələsinin həlli üçün qovma üsulu

M.M. Mütəllimov, N.İ. Vəliyeva, Ş.A. Fərəcova

XÜLASƏ

İşdə daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üç nöqtəli sərhəd şərtli optimizasiya məsələsi nəzərdən keçirilir. Məlumatların itkin dəyərinin müəyyən edilməsi üçün sərhəd şərtlərinin qeyri-standartlığından Laqranj çoxhədlisinin ilkin verilənləri istifadə edilir. Axtarılan məsələnin həlli üçün qovma üsulu təklif edilir, yəni Rikkati matris diferensial tənliklərinin həlli, həmçinin xətti matris diferensial tənlikləri istifadə edilir. Nəticələr konkret misal üzərində illüstrasiya edilir.

Açar sözlər: optimallaşdırma, qovma üsulu, üçnöqtəli sərhəd şərti, Rikkati differensial tənliyi, xətti cəbri tənliklər sistemi.

Sweep method for the solution of optimization problem with three point boundary conditions with unseparabilities in the internal and end points

M.M. Mutallimov, N.I.Velieva, Sh.A. Faradjova

ABSTRACT

In the paper the optimization problem with three-point boundary conditions with unseparabilities in the internal and end points. From the non-standardity of the boundary conditions for defining the value of the missing boundary data, the initial data of the lagrange multiplier are used. The sweep method for the solution of the initial problem is proposed, i.e. the solution of Riccati matrix differential equations is used, as well as the linear matrix differential equations which difference from the known at the decision doesn't allow to increase the dimension of initial system. The results are illustrated on the concrete examples of the gaslift process.

Keywords: optimization, sweep method, three point boundary conditions, Riccati differensial equation, linear algebraic systems equations.